FUNDACION DEL INSTITUTO NACIONAL DE INDUSTRIA

«Análisis multidimensional de las preferencias en el consumo»

M. A. Martínez-Echevarría y Ortega

SEPARATA DE LA REVISTA

INVESTIGACIONES ECONOMICAS
Número 11 — Enero-Abril'80

Análisis multidimensional de las preferencias en el consumo

Miguel A. Martínez-Echevarría y Ortega
Universidad Autónoma de Madrid

Con el fin de dar una adecuada descripción de la conducta del consumidor en el mercado, el economista recurre a la postulación de una medida del grado de satisfación que una determinada combinación de un número finito de bienes reporta al individuo que consume. Esta medida es la función de utilidad.

Así para un conjunto finito de n bienes, $X_1 ... X_n$, la función de utilidad puede expresarse

$$u = f(x_1 ..., x_n) \qquad (1)$$

Esta expresión proporciona un número que facilita la ordenación de conjuntos de bienes limitados, de acuerdo con las preferencias del consumidor.

Es lógico tratar de especificar la forma de la función (1), pues será la única manera de poder contrastar el supuesto de la existencia de dicha función de utilidad. El camino a seguir para esta especificación, es el presidido por el slogan "los hechos mandan", esto quiere decir que los datos estadísticos, obtenidos de la observación de la realidad, conllevan una información que sólo puede ser captada, cuando se dispone de unas hipótesis teóricas capaces de asimilar y moldear los datos estadísticos disponibles.

Habrá que ir imponiendo restricciones a (1) que provengan de la misma estructura de los de los datos que nos proporciona la realidad observada.

Una de las primeras cuestiones que plantea el estudio de la función de utilidad es la relación existente entre sus argumentos, x_i, que constituyen el nucleo de este planteamiento.

El valor de la función de utilidad depende del número de bienes considerados, de la naturaleza de estos bienes, de las relaciones de estos bienes en el marco de las preferencias del consumidor, de la influencia de factores aleatorios externos, y de las relaciones entre los bienes en cuanto que constituyen un conglomerado separable de los restantes bienes que puede apetecer al consumidor.

Todas las anteriores relaciones pueden englobarse en dos grandes tipos: de naturaleza "objetiva" (derivan de la naturaleza física de los bienes), y de naturaleza "subjetiva" (proceden de relaciones psicológicas entre el consumidor y su entorno).

Aparte de las anteriores relaciones hay que destacar las que provienen de la misma estructura de la observación económica. Así, por ejemplo, los datos estadísticos procedentes de observaciones económicas, no suelen referirse al comportamiento de un solo bien, sino a conjuntos o agregaciones, bastante grandes, de bienes. (Suelen conocerse los datos referentes al conglomerado "alimentos", y rara vez los referentes al bien particular "cerveza").

Lo que llevamos expuesto hace necesario recurrir a algún procedimiento que nos permita adentrarnos en el estudio de las relaciones existentes entre los diversos bienes, o agregaciones de ellos, que constituyen los argumentos de una función de utilidad.

El conocimiento de estas relaciones permitirán ir delimitando la forma apropiada de la función de utilidad a la naturaleza y estructura del problema estudiado.

Comenzaremos afirmando que las interrelaciones en un sistema únicamente se manifiestan en el comportamiento dinámico. Slutsky puso de manifiesto, y formalizó en su ecuación fundamental, que únicamente en la variación del precio de un producto, pueden manifestarse las relaciones de sustitutibilidad o de complementariedad, de ese bien con los restantes considerados.

En una primera aproximación podrá decirse que parte de las relaciones que estamos buscando se manifiestan en los elementos no diagonales de la matriz de sustitución

$$K = [k_{ij}] \text{ con } k_{ij} = \frac{\delta x_i}{\delta p_j} + x_j \frac{\delta x_i}{\delta y} = \frac{\delta x_j}{\delta p_i} + x_i \frac{\delta x_j}{\delta y} = k_{ji} \qquad (2)$$

El signo de estos elementos determina si dos bienes son sustitutivos o complementarios, según la definición de Hicks.

La sustracción del "efecto general de sustitución" de estos elementos, proporciona el "efecto específico de sustitución", el cual proporciona información sobre la estructura de las preferencias del consumidor en términos de derivadas parciales de segundo orden de la función de utilidad.

Ahora bien hasta aquí sólo se han manifestado las relaciones estáticas —aquellas que son inherentes al conjunto de bienes, aunque sólo se manifiesten en la variación de una de ellas— pero existen otro tipo de relaciones propiamente dinámicas, en el sentido de que no solamente se manifiestan en la variación, sino que son consecuencia de ella.

Hay un gran número de sucesos aleatorios que afectan la satisfacción consecuente al consumo de un cierto bien: ceteris paribus, un refresco sabe mejor en un día cálido que en un día desapacible.

Pero no solamente esto, sino que dichos sucesos aleatorios "acumulan" su influencia en el comportamiento del consumidor, provocando cambios de gusto, formación de stocks, etc.

Estos efectos aleatorios pueden ser introducidos en la función de utilidad y tratados como variables adicionales.

La función de utilidad (1) puede entonces escribirse como

$$u = f(x,\ w) \qquad (3)$$

siendo x el vector de cantidades consumidas o adquiridas, y w el vector representativo de la influencia de todos los sucesos aleatorios anteriormente citados.

Tratemos ahora de calcular el impacto de esta variable adicional w. Para ello seguiremos suponiendo que el consumidor sigue actuando de manera "racional", es decir, que su comportamiento se rige por aquellos imperativos que conducen a la maximación de su función de utilidad, ligada a la condición restrictiva impuesta por su propio presupuesto.

Para ello formemos la funcional Lagrangiana

$$L = f(x,\ w) - \lambda\,(p'x - y) \qquad (4)$$

Siendo y la renta del consumidor y p' el vector traspuesto de precios.

A partir de (4) obtendremos las condiciones extremales de primer orden.

$$\frac{\delta u}{\delta x} = p \qquad p'x = y \qquad (5)$$

Tomando diferenciales totales en estas ecuaciones y operando convenientemente se obtiene la siguiente expresión:

$$\left[\frac{\delta x_i}{\delta w_j} \right] = - \frac{1}{\lambda} K \left[\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \, \delta w_j} \right] \tag{6}$$

Expresión que nos dice que siempre que se introduce una variable adicional en la función de utilidad, la matriz de las dereivadas de x con respecto a esta variable es igual a la matriz de sustitución K multiplicada por la matriz de las derivadas parciales de segundo orden de la función de utilidad con respecto a la antigua y nueva variable, y multiplicada por la inversa, con signo negativo, de la utilidad marginal del dinero (en la terminología de Alfred Marshall).

La expresión (6) viene a describir la manera en que los fenómenos aleatorios anteriormente descritos actuan sobre las cantidades demandadas a través de la modificación de las relaciones expresadas en los elementos de la matriz de sustitución.

Para poder realizar un estudio empírico de estas relaciones e influencias podemos proceder del siguiente modo.

Supondremos que cualquier cambio produce un impacto aleatorio sobre la cantidad demandada de un cierto bien, x_i, y que este impacto se produce mediante la modificación de las utilidades marginales.

El efecto de este impacto aleatorio lo representaremos mediante un término de error ε_i, que será considerado como el "residuo" de la adecuada estimación de la cantidad demandada.

Introduzcamos ahora una distribución de probabilidad para estos terminos de error. Impondremos que $E(\varepsilon_i) = 0$, en cualquier instante de la variación. Del mismo modo impondremos que

$$E \; [\varepsilon_i \, . \, \varepsilon_i'] \; \propto - \left[\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \, \delta x_j} \right] \tag{7}$$

Es decir, la matriz contemporánea de covarianza es proporcional a la matriz de las derivadas de las utilidades marginales. (Barten 1966).

De esta última imposición se puede establecer (vid Barten) que la covarianza contemporánea de los términos de error es proporcional al efecto total de las sustituciones transversales. Es decir.

$$E\,[\varepsilon_i \varepsilon_i'] \;\propto\; - \left[\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \, \delta x_j} \right]^{-1} - \; (1/\lambda_y) \; x_y x_y \tag{8}$$

siendo

$$\lambda_y = p \, U^{-1} p^{-1}$$
$$x_y = \lambda_y U^{-1} p$$
$$U = [\delta^2 u / \delta x_i \delta \, x_j]$$

En virtud de (8) la estructura de las preferencias puede describirse del siguiente modo: Si dos bienes son sustitutivos en el sentido de Hicks, el efecto de sustitución transversal total es positivo y la correlación de los correspondientes términos de error es negativa. Y cuando dos bienes son complementarios en el sentido de Hicks, la correlación es positiva.

Lo que acabamos de establecer implica, que si es posible disponer de buenas estimaciones de los términos de error ε_i, la matriz de correlación de esas estimaciones nos proporcionará una información muy interesante sobre la estructura de las preferencias del consumidor.

La matriz Σ de las correlaciones residuales, no sólo contiene la información indicada en el párrafo anterior, sino que a partir de la magnitud de los coeficientes de correlación es posible determinar el grado de interdependencia de unos bienes con otros. En principio sería suficiente con examinar los elementos de Σ para llegar a conclusiones interesantes acerca de esas interdependencias. Pero esta tarea se complica notablemente cuando las dimensiones de R son relativamente grandes, o cuando, como suele suceder, no está muy definida la separación entre los diversos grupos de bienes que constituyen la base de la información estadística.

Hay que buscar un método de observación, que permita una mejor descripción mediante la agrupación de los bienes que están fuertemente relacionados. Tal método deberá ser puramente descriptivo, ya que dicha agrupación, debe surgir de los mismos datos, y no de ningun tipo de suposición previa acerca de la estructura de las relaciones entre los bienes.

El método estadístico de los componentes principales es un procedimiento muy adecuado, puesto que permite factorizar la matriz de las correlaciones residuales, sin realizar ningún tipo de hipótesis previa acerca de su estructura, y sin que se produzca ninguna pérdida de información. Este método fue introducido por Pearson (1901), como consecuencia de un intento de ajustar planos por el método de los mínimos cuadrados. Posteriormente fue replanteado por Hotelling (1933) para analizar estructuras de correlación.

En el caso concreto de tratar de descubrir las relaciones entre los diversos bienes que son argumentos de una función de utilidad podemos proceder del siguiente modo.

Partamos de las observaciones de n agrupaciones de bienes, tales como: "alimentos y bebidas", "vestidos y calzado", etc. Formemos las n ecuaciones de ajuste necesarias para estimar las respectivas cantidades demandas x_i^*. Si las observaciones fueron realizadas para un período de n años, obtendremos una matriz (nxn) de residuos $\varepsilon_{ij} = x_{ij}^* — x_{ij}$.

Para la realización de las estimaciones de las cantidades estimadas se suele emplear la versión dinámica de la función cuadrática de utilidad, ya que tiene la considerable ventaja de proporcionar derivadas primeras lineales, y de ese modo también son lineales en las variables las condiciones de equilibrio.

Sin pérdida de generalidad supondremos que las observaciones, que a partir de ahora designaremos por la matriz X de dimensión (nxn), estan tipificadas, de tal modo que $\Sigma = X' . X$. En tal caso la varianza total de las observaciones será igual a la traza de Σ, es decir a n.

Las componentes principales se definen como las transformaciones lineales de las X, tales como

$$\begin{bmatrix} z_{11}\, z_{12} \ldots z_{1n} \\ z_{21}\, z_{22} \ldots z_{2n} \\ \\ z_{n1}\, z_{n2} \ldots z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21} x_{22} \ldots x_{2n} \\ \\ x_{n1} x_{n2} \ldots x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

o en forma matricial abreviada

$$Z = X \,.\, A \qquad (9)$$

sujetas a la condición de que estas transformaciones sean ortogonales, es decir, que verifiquen

$$A' \,.\, A = I \qquad (10)$$

Lo cual viene a establecer que los valores a_{ij} que miden la importancia de la aportación de cada una de las X, a la formación de las Z, y que por ello se llaman "factores de carga", o "factores de peso", deben de estar normalizadas.

Además se impone la condición de que las componentes principales, z_{1j}, z_{2j} .....,z_{nj}, deben ser calculados de tal forma de que esten incorrelacionadas y que además verifiquen

$$\text{var}\,(z_{1j}) > \text{var}\,(z_{2j}) > \ldots\ldots > \text{var}\,(z_{nj}) \qquad (11)$$

Es decir, deben construirse de tal modo que cada componente principal "explique" el máximo de la variación total que deja sin "explicar" la componente principal anteriormente calculada.

Los cálculos se simplifican notablemente debido al hecho de que cada una de las columnas a_i de la matriz A de los "factores de carga", resulta ser el vector propio asociado con el valor propio de la matriz Σ de las covarianzas.

Efectivamente, tratemos de calcular la primera componente $z_1 = X \,.\, a_1$, que en este caso corresponderá a un vector de dimensiones $(nx1)$.

Por definición, su varianza

$$\text{var}\,(z_1) = E\,(z_1 z_1') = E\,(a_1' X X' a_1) = a_1' \Sigma a_1 \qquad (12)$$

tiene que ser máxima con la condición

$$a_1' a_1 — 1 = 0 \qquad (13)$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, obtenemos

$$L = a_1' \Sigma a_1 — \lambda\,(a_1' a_1 — 1) \qquad (14)$$

Diferenciando con respecto a a_1 e igualando a cero obtenemos

$$(\Sigma — \lambda I)\, a_1 = 0 \qquad (15)$$

Para que este sistema homogéneo de n ecuaciones y n incógnitas tenga una solución distinta de la trivial debe verificarse que

$$|\Sigma — \lambda I| = 0 \qquad (16)$$

o sea que el rango de $(\Sigma — \lambda I)$ sea $n — 1$.

En general, la ecuación (16) tendrá n raices $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ pues como las dimensiones de Σ eran (nxn) habrá n valores $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ que satisfagan (16). Sin pérdida de generalidad podemos ordenar dichos valores en relación a sus magnitudes, obteniendo

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots\ldots, \lambda_n > 0 \qquad (17)$$

Se tratará ahora de decidir cual de estos valores habrá que tomar, de manera que var (z_1) sea máxima. Para ello consideremos la ecuación matricial (15) y la premultiplicamos por a_1'

$$a_1' (\Sigma — \lambda I)\, a_1 = 0$$
$$a_1' \Sigma a_1 — \lambda a_1' a_1 = 0$$
$$a_1' \Sigma a_1 = \lambda$$

luego finalmente podemos escribir

$$\text{var}(z_1) = \lambda \tag{18}$$

Luego si pretendemos que esa varianza sea máxima debemos elegir aquella raiz de (16) que cumpla

$$\lambda_1 = \text{máx} \quad (\lambda_1 \lambda_2 \ldots, \lambda_n)$$

Este valor λ_1 lo sustituiremos en (16) y tendremos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas $(a_{11} \ldots, a_{1n})$ que podemos resolver, obteniendo los elementos del vector a_1. Posteriormente bastaría emplear $z_1 = Xa_1$ para obtener la primera de las componentes principales. Para determinar la segunda componente principal se procede del siguiente modo.
Se trata de maximizar $z_2 = X.a_2$ sujeta a los siguientes condicionamientos

a) z_2 este incorrelacionado con z_1
b) $\text{var}(z_2)$ sea máxima
c) $a_2'.a_2 = I$

Sabemos que

$$\text{var}(z_2) = a_2' \Sigma a_2$$

Por otro lado de a) se deduce que

$$E(z_2 z'_1) = 0 = E(a_2' XX' a_1) = a'_2 E(XX') a_2 = a'_2 \Sigma a_1 = 0$$

pero por (15) sabemos que $\Sigma a_1 = \lambda_1 a_1$.

Si se premultiplica esta última expresión por a'_2 tendremos

$$a_2' \Sigma a_1 = \lambda_1 a_2'.a_1 = 0 = E(z_2 z_1')$$

luego $a_2'.a_1 = 0$, y en consecuencia podemos afirmar que a_2 y a_1 son ortogonales.

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange y teniendo en cuenta las condiciones

$$a_2' \Sigma a_1 = 0 \tag{19}$$

$$a_2' a_2 - 1 = 0 \tag{20}$$

tendremos

$$a_2' \Sigma a_2 - 2\mu a_2' \Sigma a_1 - \lambda (a_2' a_2 - I) \tag{21}$$

Diferenciando con respecto a a_2, queda:

$$\Sigma a_2 - \mu \Sigma a_1 - \lambda a_2 = 0 \tag{22}$$

premultiplicando por a_1' tendremos:

$$a_1' \Sigma a_2 - \mu a_1' \Sigma a_1 - \lambda a_1' a_2 = 0 \tag{23}$$

pero según (15) $\Sigma a_1 = \lambda_1 a_1$, luego trasponiendo, queda:

$$a_1' \Sigma = \lambda_1 a_1' \tag{24}$$

sustituyéndola en (23) y teniendo en cuenta que

$$\text{var}(z_1) = a_1' \Sigma a_1$$

resulta

$$\lambda_1 a_1' a_2 - \mu \, \text{var}(z_1) - \lambda a_1' a_2 = 0$$

de donde se deduce que $\mu = 0$, y entonces nos queda

$$\Sigma a_2 - \lambda a_2 = 0$$

o bien

$$[\Sigma - \lambda I] a_2 = 0 \tag{25}$$

premultiplicando por a_2'

$$a_2' (\Sigma - \lambda I) a_2 = 0$$
$$a_2' \Sigma a_2 = \lambda a_2' a_2 = \lambda$$
$$a_2' \Sigma a_2 = \lambda$$
$$\text{var}(z_2) = a_2' \Sigma a_2 = \lambda \tag{26}$$

y si queremos que (26) sea máxima elegiremos el valor de λ de tal forma que

$$\lambda_2 = \text{máx} \quad (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)$$

De manera análoga al procedimiento anteriormente expuesto obtendríamos la segunda componente principal.

Repitiendo este proceso se obtendrían las restantes componentes principales, hasta llegar a la z_n.

En el caso del presente trabajo que trata de descubrir la relación existente entre los diversos bienes que son argumento de una función de utilidad, no es necesario obtener las componentes principales pues toda la información que nos interesa está encerrada en los elementos de la matriz A de los "factores de carga".

El análisis pormenorizado de los elementos de la matriz A, nos permitirá establecer el grado de relación existente entre los diversos bienes que están siendo considerados.

De todo el desarrollo seguido hasta el momento presente debe concluirse la importancia fundamental de la matriz Σ de las correlaciones de los residuos, o "términos de error", en el estudio de la estructura de las preferencias de consumo.

El signo de la correlación entre dos bienes cualesquiera indica si éstos son —en el sentido de Hicks— sustitutivos o complementarios.

Sustrayendo a cada uno de los elementos de Σ la correlación debida al efecto general de sustitución (supuesto de independencia entre los bienes) obtenemos una nueva matriz que designaremos $\in$.

Los elementos de esta nueva matriz nos proporcionan la correlación debida al efecto específico de sustitución, que nos informa directamente sobre la estructura de las preferencias en terminos de la matriz Hessiana de la función de utilidad.

La sustración citada implica añadir un número positivo a cada coeficiente de correlación total (elementos de la matriz Σ), luego en consecuencia se incrementa la complementariedad específica; aunque se mantienen las relaciones básicas expresadas por los elementos de la matriz Σ. Este resultado es coherente con el planteamiento inicial, pues la suposición de independencia entre los bienes no es más que una primera aproximación a la verdadera estructura de las preferencias del consumo.

Para el cálculo de la matriz Σ^* necesitamos conocer las correlaciones entre dos términos cualesquiera de error $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, en el supuesto de independencia entre los bienes. A. P. Barten ha establecido la siguiente expresión para esas correlaciones

$$-\sqrt{\frac{p_i\,(\delta x_i/\delta y)\,.\,p_j\,(\delta x_j/\delta y)}{(1-p_i\,.\,\delta x_i/\delta y)\,(1-p_j\,.\,\delta x_j/\delta y)}} \qquad (27)$$

con $i \neq j$.

Usando estimaciones de las derivadas respecto de la renta se puede calcular (27). Restando estas expresiones del respectivo término se obtendrá la matriz Σ^*, que llamaremos "matriz de las correlaciones especificas".

Si se desea tener una mejor idea de las agrupaciones y conglomerados implicados en la matriz Σ^* tendríamos que modificar la disposición de esa matriz, poniendo juntos los bienes con más altas correlaciones. Este procedimiento se simplifica notablemente si se recurre a la técnica de las componentes principales, expuestas en la segunda parte de este trabajo.

Referencias bibliográficas

BARTEN A. P.: "Evidence on the Slutsky conditions for demand equations". *Rev. of Econom. and Statist.* 49, 77-84, 1967.

DHRYMES P. J.: *Econometrics.* Harper and Row. New York, 1970.

FISHER W.: *Clustering and aggregation in economics.* John Hopkins. Baltimore, 1969.

HARMAN H. H.: *Moder factor Analysis.* Chicago Univ. Press, 1960.

HICKS J. R.: *A revision of demand Theory.* Oxford Univ. Press, 1956.

PHILIPS L.: "Substitution, complementarity, and the residual variation around dynamic demand equations". *American Economic Review.* 61. 586-597, 1971.

PHILIPS L., ROUZIER P.: "Substitution, complementarity and the residual variation: Some further results". *American Econ. Rev.* 62. 747-751, 1972.